基本問題（７０）

1　情報量・情報源

Q1.　情報量について次の問いに答えよ。

(1)　「情報」の定義を簡潔に述べよ。

(2)　確率 p に対する情報量 $I(p)$ の定義式を答えよ。

(3)　確率 $p=\frac{1}{10}$ に対する情報量を答えよ。

(4)　社会を支える３要素をそれぞれ答えよ。

Q2.　次の条件つき確率の問いに答えよ。

	$x_1=0$	$x_1=1$
$x_0=0$	0.22	0.28
$x_0=1$	0.10	0.40

(1)　$\sum_{x_1} P_{X_1\|X_0}(x_1\|x_0)$　を計算せよ。

(2)　周辺確率 $P_{X_0}(0)$ と $P_{X_0}(1)$ を求めよ。

(3)　それぞれの条件つき確率を求めよ。

Q3.　次の問いに答えよ。

	$x_i=0$	$x_i=1$
$x_{i-1}=0$	0.85	0.15
$x_{i-1}=1$	0.30	0.70

(1)　状態 S_0，S_1 を用いて状態遷移図を書きなさい。

(2)　この情報源は記憶を持っているといえるか。

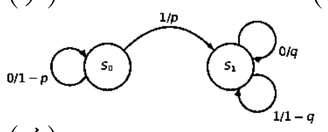
(3)　現在の出力 X_i が，直前の出力 X_{i-1} およびその一つ前の出力 X_{i-2} に依存して生成される場合を考える。このとき，現在の出力が過去２時刻の出力に条件づけられる確率を表す条件付き確率を数式で表せ。

(4)　(3)のような情報源をなんというか。

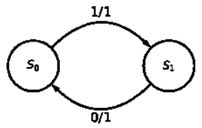
2　極限分布

Q1.　状態の分類について次の問いに答えよ。

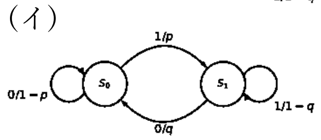
（ア）



（ウ）



（イ）



(1)　(ア)～(ウ)の状態の名称を答えよ。

(2)　情報源の中で(ウ)を持たない情報源を答えよ。

(3)　(2)が十分に時間経過すると、どんな情報源とみなすことができるか。

(4)　過渡状態を含まない情報源を答えよ。

Q2.　極限分布について次の問いに答えよ。

	$x_i=0$	$x_i=1$
$x_{i-1}=0$	0.70	0.30
$x_{i-1}=1$	0.40	0.60

(1)　この時点での遷移確率行列 Π を求めよ。

(2)　状態遷移図を書きなさい。

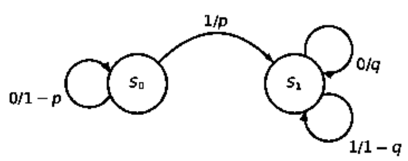
(3)　$\boldsymbol{w}^1 = \boldsymbol{w}^0\Pi$ を一般化した式を答えよ。

(4)　$\mathrm{w}=\mathrm{w}\Pi$ の式に従って導いた連立方程式を答えよ。

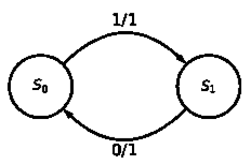
(5)　時点 $t\to\infty$ としたときの分布 ω_0、ω_1 を答えよ。

Q3.　次の極限分布を求めよ。

(1)



(2)



3　一次エントロピー

Q1.　一次エントロピーについて次の問いに答えよ。

(1)　一次エントロピーの定義式を答えよ。

(2)　(1)を２元系とみなして関数化せよ。

(3)　情報源 $\mathrm{S_A}$ において、$\mathrm{P_A}(0)=\frac{2}{3}$、$\mathrm{P_B}(1)=\frac{1}{3}$ であるときの一次エントロピーを答えよ。

(4)　情報源 $\mathrm{S_A}$ において、$\mathrm{P_A}(0)=\frac{1}{2}$、$\mathrm{P_B}(1)=\frac{1}{2}$ であるときの一次エントロピーを答えよ。

Q2.　平均情報量について次の問いに答えよ。

0	0	1	0	1	1	1	0

情報源 $\mathrm{S_A}$ は、$\mathrm{P_A}(0)=\frac{5}{8}$、$\mathrm{P_B}(1)=\frac{3}{8}$ を示す。しかし実際の結果は上の通りだった。

(1)　それぞれの生起確率を求めよ。

(2)　平均情報量を求めよ。

(3)　(2)の結果でどのようなことが言えるか述べよ。

応用問題（３０）

4　拡大情報源とエントロピー

一次のマルコフ情報源 $S=\{0,1\}$ が，次の条件付き確率で与えられている。

$P(0\mid 0)=0.7, P(1\mid 0)=0.3, P(0\mid 1)=0.2, P(1\mid 1)=0.8$

本問では，エントロピーとは拡大次数を無限大にしたときの１記号あたりのエントロピー

$$H(S)=\lim_{n\to\infty} H_n(S)$$

を指すものとする。

【ステップ１】

この情報源の極限分布を (ω_0,ω_1) とすると、

$\omega_0=$（ア：式）

$\omega_1=$（イ：式）

確率の公理＝（ウ：式）

より、$\omega_0=$（エ：解）、$\omega_1=$（オ：解）となる。

【ステップ２】

二次拡大情報源では，連続する２記号(00,01,10,11)を１つの記号として扱う。

このとき，各２記号パターンの生起確率は，

$P(00)=$（カ：解）

$P(01)=$（キ：解）

$P(10)=$（ク：解）

$P(11)=$（ケ：解）

である。

【ステップ３】

二次拡大情報源の一次エントロピー $H_1(S_2)$ は，

$H_1(S_2)=$（コ：式）

で与えられる。よって、

$H_1(S_2)=$（サ：解）

【ステップ４】

二次エントロピーは、

$H_2(S)=$（シ：式）

で定義される。よって、

$H_2(S)=$（ス：解）

【ステップ５】

一次マルコフ情報源において、エントロピーは

$H(S)=$（セ※式と解を答える）

で求められる。高次エントロピーはエントロピーに近似するので、（ソ：グラフ）のようなグラフになる。